

Skript - Mechanische Wellen

Autor: Norbert Marxer

Erstellung: 15.07.2025 (Version 1)

Übersicht

Inhaltsverzeichnis

Übersicht	1
Inhaltsverzeichnis	1
Wellen	2
Mathematische Beschreibung der Ausbreitung	2
Größen des Wellenfeldes	3
Wellenausbreitung	3
Überlagerungen	4
Mathematische Beschreibung der Ausbreitung	5
Wellengleichung	5
Harmonische Welle	5
Größen des Wellenfeldes	9
Einleitung	9
Energie	9
Energiedichte	9
Energiestrom	9
Leistung	10
Intensität	10
Wellenwiderstand	10
Wellenausbreitung	12
Arten von mechanischen Wellen	12
Geschwindigkeit der Wellen	13
Verhalten bei einem Grenzübergang	14
Huygens'sches Prinzip und Überlagerungen	17
Huygens'sches Prinzip	17
Überlagerung/Superposition/Interferenz	19
Stehende Wellen	21
Anhang	23
Anhang A Experimente	24
Anhang B Quellen	25
Anhang C Kurze historische Entwicklung	26
Anhang D Wellengleichung	28

Wellen

Wir kennen aus dem Alltag eine Vielzahl von Wellen. Beispielsweise ...

- Schallwellen beim Sprechen → Mechanische Wellen in Gasen
- Licht beim Sehen → Elektromagnetische Wellen
- Wasserwellen beim Surfen → Oberflächenwellen
- Seismische Wellen bei Erdbeben → Mechanische Wellen in Festkörpern/Flüssigkeiten

Eine **Welle** ([Link](#)) bezeichnet den Vorgang, dass sich eine Erregung (lokale Abweichung aus dem Ruhezustand) räumlich ausbreitet. Dabei werden Energie und Impuls von Ort zu Ort mittels elektromagnetischer Kräfte (Stößen bei Gasen bzw. Kohäsionskräften bei Flüssigkeiten und Festkörpern) übertragen. Es findet jedoch kein Materietransport statt.

Diese Erregung kann der Druck, die Dichte, die Höhe einer Wasseroberfläche, ein elektrisches oder magnetisches Feld usw. sein. Wir unterscheiden zwischen ...

- Wellen, die sich in einem materiellen Medium ausbreiten (z.B. Schallwellen, Wasserwellen, Seismische Wellen),
- und Wellen, die nicht an ein Medium gebunden sind (elektromagnetische Wellen, Gravitationswellen).

Schallwellen in Luft werden wir intensiv in der **Akustik** studieren. Licht (eine elektromagnetische Welle mit einer Wellenlänge von zirka 400 nm bis 800 nm) wird dann Gegenstand im Vortrag über **Optik** sein.

Mathematische Beschreibung der Ausbreitung

Wir untersuchen in diesem Skript nur die eindimensionalen, harmonischen Wellen, die durch harmonische Schwingungen bzw. Anregungen erzeugt werden. Sie erfüllen die 1-dimensionale Wellengleichung ...

$$y'' - \frac{1}{c^2} \ddot{y} = 0$$

Dabei ist ...

y	die vom Ort und der Zeit abhängige Auslenkung/Abweichung/Störung
y''	die zweite Ableitung nach dem Ort x
\ddot{y}	die zweite Ableitung nach der Zeit t
c	die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Die harmonischen Lösungen dieser Wellengleichung können mit Hilfe der Winkelfunktionen beschrieben werden. Beispielsweise mittels ...

$$y[x, t] = \hat{y} \sin[kx - \omega t]$$

mit den wichtigen und anschaulichen Grössen Wellengeschwindigkeit, Wellenlänge, Periodendauer ...

$y[x, t]$	die vom Ort und der Zeit abhängige Auslenkung
\hat{y}	die Amplitude (maximale Auslenkung) der Welle
k	Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ mit der Wellenlänge λ
ω	Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ mit der Periodendauer T
c	Wellengeschwindigkeit $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

Grössen des Wellenfeldes

Die Funktion $y[x, t] = \hat{y} \sin[kx - \omega t]$ beschreibt die räumliche und zeitliche Auslenkung der schwingenden Teilchen. Die Teilchen schwingen an Ort - es wird somit keine Materie transportiert. Es findet jedoch ein Energietransport statt, da Schwingungsenergie von Teilchen zu Teilchen weitergeleitet wird.

Im Abschnitt "Grössen des Wellenfeldes" leiten wir dann die Gleichungen für verschiedene Wellengrössen her. Insbesondere ...

$$w = \frac{E}{V} = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 \stackrel{\hat{v} = \omega \hat{y}}{=} \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2$$

Energiedichte (Energie pro Volumen)

$$E = wV = wAct = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 Act = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 Act$$

Energie, die in der Zeit t die Fläche A durchströmt

$$P = \frac{E}{t} = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 Ac = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 Ac$$

Leistung: Energie pro Zeit, die die Fläche A durchströmt

$$J = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 c$$

Intensität: Energie pro Zeit und Fläche

$$Z = \rho c$$

Wellenwiderstand

Wellenausbreitung

Als nächstes diskutieren wir die Wellenausbreitung. Bei mechanischen Wellen führen die Schwingungen/Stösse von Teilchen (Atome, Moleküle) zum Energietransport. Wir unterscheiden zwei Arten von mechanischen Wellen ...

- Transversalwellen ...
 - Die Teilchen schwingen quer zur Ausbreitungsrichtung der Welle.
 - Sie können nur in Festkörpern oder Flüssigkeiten mit grossen Schermodulen auftreten.
- Longitudinalwellen ...
 - Die Teilchen schwingen parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle.
 - Sie können in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern auftreten.

Als nächstes betrachten wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen. Diese Geschwindigkeiten sind unterschiedlich für Festkörper, Flüssigkeiten und Gase sowie für Querwellen und Längswellen. Wir geben Formeln an, wie diese Geschwindigkeiten von anderen physikalischen Grössen wie Dichte oder Elastizitätsmodul abgeleitet werden können. Ausserdem geben wir für einige typische Materialien deren Wellengeschwindigkeit in Tabellen an.

Wenn eine Welle auf einen Übergang zwischen zwei Medien trifft, kann die Welle ...

- teilweise reflektiert,
- teilweise gebrochen/abgelenkt und
- im Medium selbst durch Absorption abgeschwächt werden.

Es gelten die folgenden Gesetze bezüglich der Richtung der reflektierten bzw. der gebrochenen Welle ...

- Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel
- Brechungswinkel α_2 wird berechnet gemäss $\frac{\sin[\alpha_1]}{c_1} = \frac{\sin[\alpha_2]}{c_2}$

wobei: α_1, α_2 sind die Winkel der Strahlen im ersten bzw. im zweiten Medium
 c_1, c_2 sind die Wellengeschwindigkeiten im entsprechenden Medium

Mit Hilfe der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten lässt sich der Anteil bestimmen, der reflektiert bzw. gebrochen/transmittiert wird. Diese Koeffizienten lassen sich mit Hilfe der Wellenwiderstände Z_1 und Z_2 berechnen. Die Wellenwiderstände sind gegeben durch das Produkt aus Dichte und Wellengeschwindigkeit ($Z = \rho c$) und somit eine Eigenschaft des Materials.

$$\text{Reflexionskoeffizient (für Amplitude):} \quad r_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\text{Transmissionskoeffizient (für Amplitude):} \quad t_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Ein wichtiger Aspekt ist auch die Phasenänderung bei Reflexion und Transmission. Sie kann gleich 0 oder gleich π sein. Wir werden im Text genauer erläutern, was das bedeutet.

Überlagerungen

Zum Abschluss gehen wir noch auf Superpositionen ein. Solche Superpositionen/Interferenzen sind auch für Wellen von grosser Bedeutung. Anwendungen gibt es bei ...

- Stehenden Wellen
- Wellen im Wasser
- Schallwellen im Konzertsaal

Viele ganz wichtige Beispiele gibt es dann auch im Skript Optik ...

- Überlagerung an dünnen Schichten,
- Interferometer mit Licht/elektromagnetischer Strahlung,
- Gravitationswellendetektor (LIGO und Virgo).

Die Umkehrung (die Auflösung einer allgemeinen Welle in eine Summe von harmonischen Wellen; d.h. eine Spektralanalyse) kann mit Hilfe der Fourier Transformation durchgeführt werden. Wir werden im Kapitel "Akustik" näher darauf eingehen.

Mathematische Beschreibung der Ausbreitung

Wellengleichung

Alle Funktionen y der Form ...

$$y[x, t] = f[x - c t] \quad \text{und} \quad y[x, t] = f[x + c t]$$

Im Allgemeinen stellt $y[x, t]$ eine Funktion dar, die zwei unabhängige Variablen hat. In diesem Spezialfall gibt es jedoch nur eine unabhängige Variable ($x - c t$ oder $x + c t$), bei der x und t nur kombiniert vorkommen.

beschreiben eine mit der Geschwindigkeit c von links nach rechts (in Richtung der x -Achse) bzw. von rechts nach links propagierende Welle und erfüllt die Wellengleichung (siehe Anhang D). An Stelle von f bezeichnen wir für die bei Schwingungen und Wellen auftretenden Auslenkungen (wie in der Physik üblich) mit dem Buchstaben y . Somit lautet die Wellengleichung ...

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{1-dim Wellengleichung}$$

oder kürzer ...

$$y'' - \frac{1}{c^2} \ddot{y} = 0$$

Dabei ist ...

y	die vom Ort x und der Zeit t abhängige Auslenkung
y'' oder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$	die zweite Ableitung nach dem Ort x
\ddot{y} oder $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	die zweite Ableitung nach der Zeit t
c	die Geschwindigkeit der Welle

Harmonische Welle

Wir untersuchen im Folgenden nur die eindimensionalen, harmonischen Wellen, die durch harmonische Schwingungen bzw. Anregungen erzeugt werden. Dies lässt sich illustrieren mit einem Slinky oder einer Wellenmaschine (interessantes Video unter [Link](#)) ...

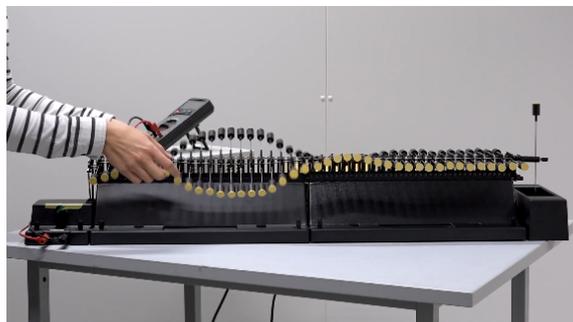


Abbildung Wellenmaschine: durch eine harmonische Schwingung wird eine harmonische Welle erzeugt. Die Stäbe sind miteinander gekoppelt, so dass sich die Schwingung von einem Stab auf den nächsten überträgt.

Im Internet kann auch mit einer Seilwelle ([Link](#)) oder einer Wellenmaschine ([Link](#)) experimentiert werden.

Aus der folgenden Abbildung können wir auch gut den Zusammenhang zwischen Periodendauer, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit herauslesen.

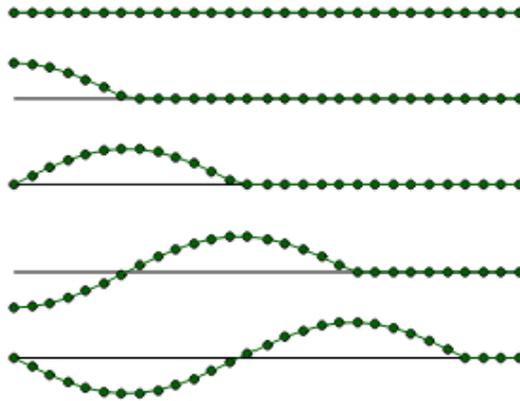


Abbildung Die Anregung/Schwingung führt eine ganze Periode mit der Dauer T aus. Die Störung hat sich in dieser Zeit um eine Wellenlänge λ fortgepflanzt. Die Wellengeschwindigkeit ist somit gleich $c = \frac{\lambda}{T}$.

Die harmonischen Wellen lassen sich durch die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus oder eine Kombination von Sinus und Cosinus beschreiben. Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden nur die Sinusfunktion hin.

Wir starten mit der folgenden Form (diese Sinusfunktion hat als Argument den Ausdruck " $x - ct$ " und erfüllt somit die Wellengleichung) ...

$$y[x, t] = \hat{y} \sin[k(x - ct) + \varphi_0]$$

x	Ort/Position
t	Zeit
y	Auslenkung (Elongation), abhängig von der Zeit und dem Ort
\hat{y}	maximale Auslenkung, Amplitude
k	Wellenzahl: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $kc = \frac{2\pi}{\lambda} c = 2\pi f = \omega$
c	(Phasen)-Geschwindigkeit der Welle
φ_0	Nullphasenwinkel; Phase zur Zeit $x = 0$ und $t = 0$

Mit Hilfe der Beziehungen ...

Kreisfrequenz ω	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	T: Periodendauer
Wellenzahl k	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	λ : Wellenlänge
Ausbreitungsgeschwindigkeit c	$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$	

können wir den obigen Ausdruck (der Einfachheit halber für den Spezialfall $\varphi_0 = 0$) auch alternativ schreiben als ...

$$y[x, t] = \hat{y} \sin[k(x - ct)] = \hat{y} \sin[kx - \omega t] = \hat{y} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t\right] = \hat{y} \sin\left[\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right]$$

Bemerkung:

- Die Schreibweise $\hat{y} \sin[kx - \omega t]$ mit k und ω bedeutet am wenigsten Schreibarbeit und ist zu **bevorzugen**.
- Die Schreibweise $\hat{y} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t\right]$ mit λ und T hat einen Bezug zu den anschaulichen Grössen Wellenlänge und Periodendauer.
- Die Schreibweise $\hat{y} \sin[k(x - ct)]$ mit k und c hat einen Bezug zur Formel $f[x - ct]$ für allgemeine Wellen.
- Die Schreibweise $\hat{y} \sin\left[\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right]$ mit c und ω betont die Kreisfrequenz.
- Ingenieure (und auch Kuchling) verwenden häufig $\sin[\omega t - kx]$ statt $\sin[kx - \omega t]$. Sie unterscheiden sich nur durch ein Vorzeichen, denn ...

$$\sin[kx - \omega t] = \sin[-(\omega t - kx)] = -\sin[\omega t - kx]$$

Wichtige Grössen bei Wellen sind die Periodendauer T , die Wellenlänge λ und die Geschwindigkeit c der Welle. Die Welle breitet sich im Raum aus und die Auslenkungen hängen (im Unterschied zu Schwingungen) sowohl vom Ort x als auch von der Zeit t ab.

Auslenkung an einer bestimmten Stelle

Die obige Formel (mit Nullphasenwinkel φ_0) zeigt uns auch, dass **an einer bestimmten Stelle x_0** die von der Zeit abhängige Auslenkung durch eine Sinus-Funktion beschrieben wird ...

$$y[x_0, t] = \hat{y} * \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x_0 - \frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right] = \hat{y} * \sin\left[-\frac{2\pi}{T} t + \left(\frac{2\pi}{\lambda} x_0 + \varphi_0\right)\right] = \hat{y} * \sin\left[-\frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right]$$

und die zeitliche Periode T hat. Denn nach einer Zeitdauer T nimmt die Sinusfunktion wieder den gleichen Wert an ...

$$\hat{y} * \sin\left[-\frac{2\pi}{T} (t + T) + \varphi_1\right] = \sin\left[-\frac{2\pi}{T} t - 2\pi + \varphi_1\right] \stackrel{\text{periodisch}}{=} \hat{y} * \sin\left[-\frac{2\pi}{T} t + \varphi_1\right]$$

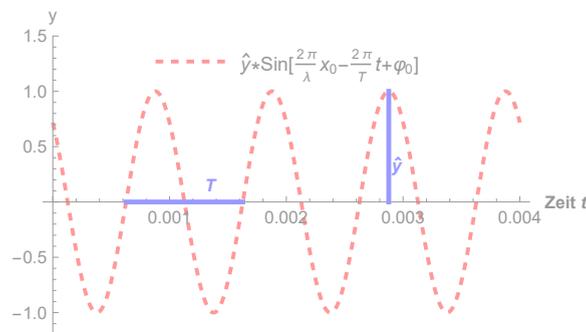


Abbildung Darstellung der Zeitabhängigkeit der Auslenkungen für ein Teilchen an einem bestimmten Ort x_0 .

Auslenkung zu einer bestimmten Zeit

Analog können wir **für eine bestimmte Zeit t_0** schreiben ...

$$y[x, t_0] = \hat{y} * \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t_0 + \varphi_0\right] = \hat{y} * \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x + \left(-\frac{2\pi}{T} t_0 + \varphi_0\right)\right] = \hat{y} * \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_2\right]$$

Zu einer bestimmten Zeit stellt sich die Auslenkungen sinusförmig im Raum dar. Sie hat die Periode λ , denn die Funktionswerte an der Stelle x und an der Stelle $x + \lambda$ sind gleich ...

$$\hat{y} * \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} (x + \lambda) + \varphi_2\right] = \hat{y} * \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x + 2\pi + \varphi_2\right] \stackrel{\text{periodisch}}{=} \hat{y} * \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_2\right]$$

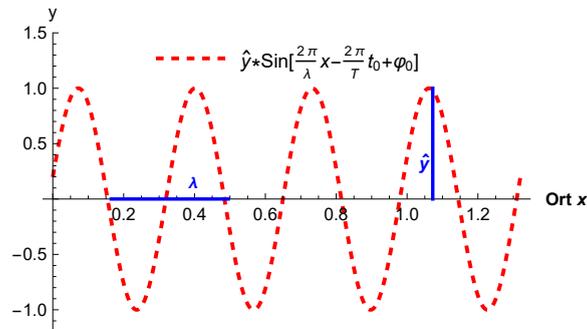


Abbildung Schnappschuss: Darstellung der Ortsabhängigkeit der Auslenkungen zu einer bestimmten Zeit.

Größen des Wellenfeldes

Einleitung

Wie gesehen lässt sich eine harmonische Welle folgendermassen darstellen ...

$$y[x, t] = \hat{y} * \text{Sin}[k x - \omega t]$$

Diese Funktion beschreibt die räumliche und zeitliche Auslenkung der schwingenden Teilchen. Die Teilchen schwingen an Ort - es wird somit keine Materie transportiert. Es findet jedoch ein Energietransport statt, da Schwingungsenergie von Teilchen zu Teilchen weitergeleitet wird.

In diesem Abschnitt untersuchen wir nun, wieviel Energie in dieser Welle steckt und wieviel Energie transportiert wird.

Energie

Wieviel Energie steckt in einer solchen Welle?

Wir haben bei den Schwingungen gesehen, dass die **totale Energie** eines schwingenden Teilchens mit der Masse m den Wert ...

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m \hat{v}^2 = \frac{1}{2} k \hat{y}^2 \quad \text{Energie für ein Teilchen der Masse } m$$

hat.

Achtung: das k hier ist die Federkonstante k , nicht die Wellenzahl k

In einem Volumen V befindet sich die Masse ...

$$m = \rho V$$

und somit ergibt sich dann die totale Energie für ein Volumen V zu ...

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \rho V \hat{v}^2 \quad [E_{\text{tot}}] = \text{J}$$

Energiedichte

Daraus können wir nun die **Energiedichte w** , d.h. die Energie pro Volumen, bestimmen ...

$$w = \frac{E_{\text{tot}}}{V} = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 \stackrel{\hat{v} = \omega \hat{y}}{=} \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 \quad [w] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Energiestrom

Wir kennen aus dem Kapitel über Strömungen die Gleichung für den Volumenstrom $\frac{V}{t} = A v$ (d.h. das Volumen V , das in der Zeit t durch die Querschnittsfläche A strömt). Das heisst ...

$$V = A c t$$

Damit können wir nun die **Energie E** (Energiedichte mal Volumen) bestimmen, die in der Zeit t durch die Querschnittsfläche A strömt ...

$$E = w V = w A c t = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 A c t = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 A c t \quad [E] = \text{J}$$

Wir müssen hier unterscheiden zwischen den beiden Geschwindigkeiten ...

- v (Hin- und Her)-Geschwindigkeit der Teilchen
- c (Phasen)-Geschwindigkeit der Welle

Leistung

Für die **Leistung P** (d.h. die Energie pro Zeit, die durch die Querschnittsfläche A strömt) ergibt sich dann gemäss $P = \frac{E}{t} \dots$

$$P = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 A c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 A c \quad [P] = W$$

Intensität

Und schlussendlich für die **Intensität J** gemäss $J = \frac{P}{A} \dots$

$$J = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \rho \hat{v}^2 c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{y}^2 c \quad [J] = \frac{W}{m^2}$$

Bemerkung

- Die obigen Grössen sind nur dann ortsunabhängig, wenn es sich um 1-dimensionale Wellen oder ebene Wellen im 2D und 3D handelt.
- Bei Kreiswellen im 2D und Kugelwellen im 3D nimmt die Energiedichte proportional mit $\frac{1}{r}$ bzw. mit $\frac{1}{r^2}$ ab.
- Dabei ist die mögliche Energieabsorption in einem Medium nicht berücksichtigt.

Wellenwiderstand

Eine weitere wichtige Grösse ist der sogenannte **Wellenwiderstand Z** (eine Materialeigenschaft) ...

$$Z = \rho c \quad \rho \text{ Dichte, } c \text{ Wellengeschwindigkeit}$$

Er wird insbesondere bei der Berechnung von Reflexionen und Transmissionen eingesetzt. Wenn eine Welle (y_i) vom Medium 1 unter einem Einfallswinkel von 0 Grad auf ein Medium 2 trifft, gilt für ...

die reflektierte Welle	$y_r = r_{12} y_i$	
mit	$r_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$	Reflexionskoeffizient (für Amplitude)
die transmittierte Welle	$y_t = t_{12} y_i$	
mit	$t_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$	Transmissionskoeffizient (für Amplitude)

Es ist naheliegend, zu argumentieren, dass aus Energieerhaltungsgründen die Summe ...

$$r_{12} + t_{12} = 1 \quad \text{FALSCH!}$$

sein sollte. Dies ist jedoch nicht der Fall ...

$$r_{12} + t_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1 - Z_2 + 2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{3Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Der Grund ist: wir müssen nicht die Amplituden, sondern die Intensitäten (= Energie pro Zeit pro Fläche) betrachten. Die Intensität hat die Formel ...

$$J = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 \hat{y}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2 Z$$

Somit ergibt sich mit ...

$$\begin{aligned} J_{\text{einfallend}} &= \frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2 Z_1 \\ J_{\text{reflektiert}} &= \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \hat{y} \right)^2 Z_1 \\ J_{\text{transmittiert}} &= \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \hat{y} \right)^2 Z_2 \end{aligned}$$

für die Summe der Intensitäten für die reflektierte und transmittierte Welle ...

$$\begin{aligned}
 & J_{\text{reflektiert}} + J_{\text{transmittiert}} \\
 &= \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \hat{y} \right)^2 Z_1 + \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \hat{y} \right)^2 Z_2 \\
 &= \left(\frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2 \right) * \left(\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 * Z_1 + \left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 Z_2 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2 \right) * \left(\frac{(Z_1 - Z_2)^2 Z_1 + (2Z_1)^2 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2 \right) * \left(\frac{(Z_1^2 - 2Z_1 Z_2 + Z_2^2) Z_1 + (4Z_1^2 Z_2)}{(Z_1^2 + 2Z_1 Z_2 + Z_2^2)} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2 \right) * \left(\frac{(Z_1^2 + 2Z_1 Z_2 + Z_2^2) Z_1}{(Z_1^2 + 2Z_1 Z_2 + Z_2^2)} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \omega^2 \hat{y}^2 \right) * Z_1 \\
 &= J_{\text{einfallend}}
 \end{aligned}$$

entspricht der Intensität für die einfallende Welle.

Es gilt jedoch auf Grund der Randbedingungen am Übergang ...

$$1 + r = t$$

Dies gilt für unsere obigen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (für die Amplitude) ...

$$\begin{aligned}
 1 + r &= 1 + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \\
 t &= \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}
 \end{aligned}$$

Wir merken uns ...

- Zur Berechnung der **Interferenzen** müssen die **Amplituden** genommen werden.
- Zur Berechnung der **Intensitäten** müssen die **Quadrate der Amplituden** genommen werden.

Wellenausbreitung

Arten von mechanischen Wellen

Bei mechanischen Wellen führen die Schwingungen/Stöße von Teilchen (Atome, Moleküle) zum Energietransport. Wir unterscheiden zwei Arten von Wellen ...

- Transversalwellen ...
- Longitudinalwellen ...

Transversalwellen können nur in Festkörpern oder Flüssigkeiten (mit grossen Schermodulen) auftreten, während Longitudinalwellen in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen auftreten können.

Longitudinalwellen und Transversalwellen haben im gleichen Material nicht die gleiche Geschwindigkeit. Deshalb kommen die von einem Erdbeben ausgelösten Longitudinal- und Transversalwellen am Beobachtungsort zu verschiedenen Zeiten an.

Transversalwellen

Bei **Transversalwellen** schwingen die Teilchen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

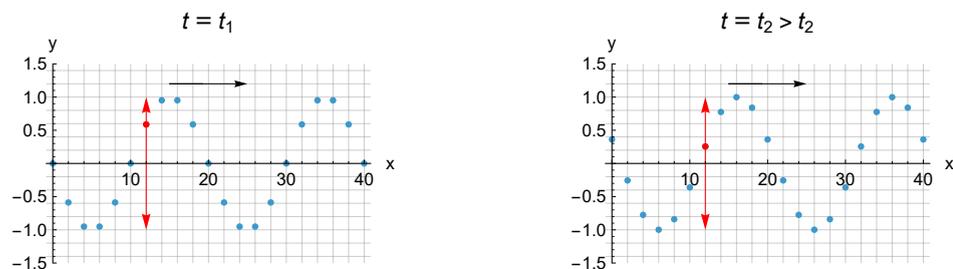


Abbildung Zwei Schnappschüsse bei einer Transversalwelle. Die Teilchen bewegen sich auf und ab (roter Doppelpfeil), während die Welle von links nach rechts läuft (schwarzer Pfeil).

Longitudinalwellen

Bei **Longitudinalwellen** schwingen die Teilchen parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

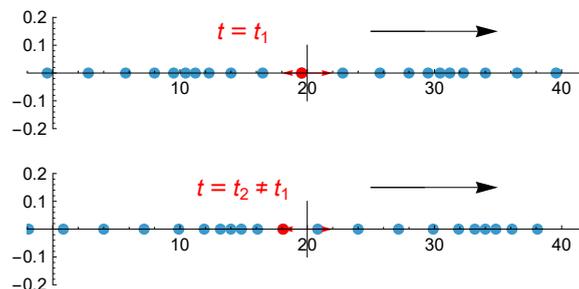


Abbildung Zwei Schnappschüsse bei einer Longitudinalwelle. Die Teilchen bewegen sich vor und zurück (roter Doppelpfeil) um die Gleichgewichtslage (schwarzer Strich), während die Welle (Verdichtungen) von links nach rechts läuft.

Gemischte Welle

Bei dieser Welle kreisen die Teilchen um einen Punkt. Auch dies sieht wie eine laufende Welle aus.

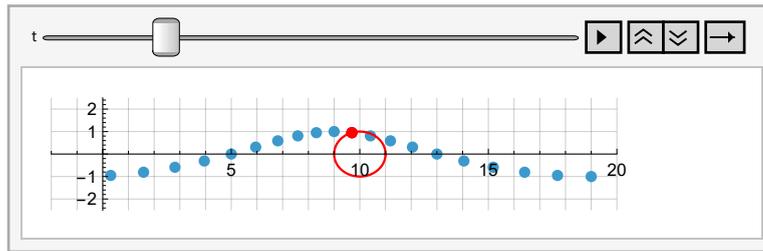


Abbildung Animation (nicht in pdf): kreisförmige Teilchenbewegungen führen auch zu einer Wellenbewegung.

Geschwindigkeit der Wellen

Die Geschwindigkeiten der Wellen lassen sich durch Messungen bestimmen. Wir können aber auch eine theoretische Analyse durchführen und die Wellengeschwindigkeiten aus anderen physikalischen Grössen ableiten. Es ergeben sich für Festkörper, Flüssigkeiten und Gase sowie für Querwellen und Längswellen unterschiedliche Beziehungen ...

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

elastische **Querwelle** in einem Festkörper

Kraft F , Dichte ρ , Querschnittsfläche A , Spannung σ

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

elastische **Längswelle** in einem Festkörper (Stab)

Elastizitätsmodul E , Dichte ρ

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}}$$

Längswelle in einer Flüssigkeit

Kompressionsmodul K , Dichte ρ , Kompressibilität κ

$$c = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}} = \sqrt{\chi R_i T}$$

Längswelle in einem Gas

Druck p , Dichte ρ , Isentropenexponent χ , spez. Gaskonstante R_i , Temperatur T

mit den Einheiten: $[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $[F] = \text{N}$, $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $[A] = \text{m}^2$, $[\sigma] = [E] = [K] = \left[\frac{1}{\kappa}\right] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$,

$$[\chi] = 1, [R_i] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Die Bedeutung der obigen physikalischen Grössen (Elastizitätsmodul, Kompressibilität, spez. Gaskonstante usw.) werden wir in den Skripten "Wärmelehre" und "Festkörper" näher erläutern.

In den folgenden Tabellen sind die Geschwindigkeiten von Longitudinalwellen für einige ausgewählte Materialien aufgeführt (Quelle: Kuchling, Tabelle 35).

Material	Schallgeschwindigkeit in m/s
Aluminium	5110
Gold	2000
Eiche	3800
Kork	500
Quarzglas	5400

Tabelle Schallgeschwindigkeiten für **Festkörper** (bei 20°C)

Material	Schallgeschwindigkeit in m/s
Aceton	1190
Diethylether	985
Quecksilber	1421
destilliertes Wasser	1483
Meerwasser	1531

Tabelle Schallgeschwindigkeiten für **Flüssigkeiten** (bei 20°C)

Material	Schallgeschwindigkeit in m/s
Argon	308
Helium	971
Luft	344
Sauerstoff	315
Stickstoff	334
Wasserstoff	1286

Tabelle Schallgeschwindigkeiten für **Gase** (bei 20°C, 101.3 kPa)

Verhalten bei einem Grenzübergang

Gegeben seien zwei Medien (Materialien) mit den Wellengeschwindigkeiten c_1 bzw. c_2 .

Wenn sich eine Welle im Medium 1 ausbreitet und auf das Medium 2 trifft, dann wird ein Teil der Welle reflektiert und ein Teil der Welle transmittiert. Es gilt für die **Richtung** ...

- der reflektierten Welle ...

$$\alpha_{\text{einfallend}} = \alpha_{\text{reflektiert}}$$

Reflexionsgesetz

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel

- der transmittierten (gebrochenen) Welle ...

$$\frac{\sin[\alpha_{\text{einfallend}}]}{c_1} = \frac{\sin[\alpha_{\text{gebrochen}}]}{c_2}$$

Brechungsgesetz, Gesetz von Snellius

wobei: α_1, α_2 sind die Einfalls/Ausfallswinkel im ersten bzw. zweiten Medium
 c_1, c_2 sind die Wellengeschwindigkeiten im entsprechenden Medium

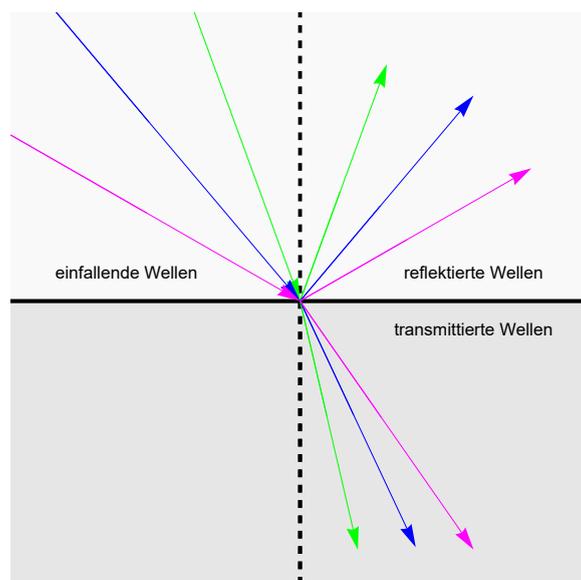


Abbildung Die von links oben unter drei verschiedenen Winkel einfallenden Wellen werden teilweise reflektiert und teilweise transmittiert.

Der reflektierte und der gebrochene Strahl verlaufen in der Ebene, die durch den einfallenden Strahl und die Normale zur Oberfläche festgelegt wird. Die Winkel werden vom Lot aus gemessen.

Das Gesetz von Snellius kann auf mehrere Arten hergeleitet werden. David Nolte gibt in einem Blog Beitrag ([Link](#)) fünf verschiedene Herleitungen an ...

- Huygens' Principle
- Fermat's Principle
- Wavefront Continuity
- Plane-wave Boundary Conditions
- Photon Momentum Conservation

Wir werden im nächsten Kapitel die anschauliche Herleitung mit dem Huygens-Prinzip erläutern.

Welcher Anteil wird reflektiert und welcher Anteil gebrochen? Dies können wir (für die Amplituden) mit Hilfe des Wellenwiderstands angeben (siehe auch die Bemerkungen zum Wellenwiderstand weiter vorne) ...

$$r_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{Reflexionskoeffizient (für die Amplitude)}$$

$$t_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{Transmissionskoeffizient (für die Amplitude)}$$

Die **Phase** erleidet dabei ...

- bei **Reflexion** einen Phasensprung von π (bzw. 180°), falls $c_2 < c_1$ ist,
- bei **Reflexion** keinen Phasensprung, falls $c_2 > c_1$ ist,
- bei **Transmission** keinen Phasensprung.

Was heisst das? Was ist die Bedeutung des Phasensprungs?

Dies soll mit den folgenden Abbildungen gezeigt werden.

Eine (angenommen) unendlich ausgedehnte von links einfallende Welle (blau strichliert) trifft auf die Wand rechts und wird reflektiert (grün strichliert) und verläuft dann nach links. Die beiden Wellen überlagern sich und ergeben die rote Welle. Wir sehen, dass an der Wand die Amplitude der grünen Welle um π (bzw. 180°) versetzt ist. Die Überlagerung der beiden um π (bzw. 180°) versetzten Wellen ergibt für die Amplitude der roten Welle an der Wand stets den Wert 0.

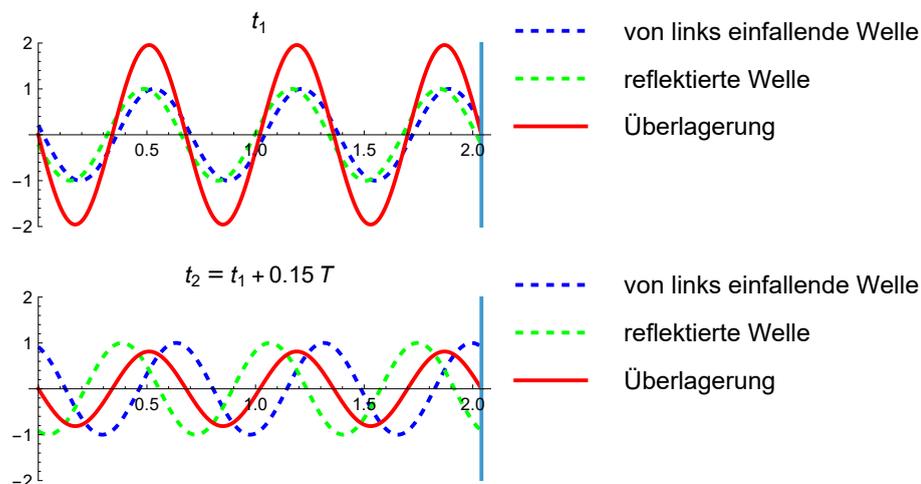


Abbildung Vollständige Reflexion mit Phasensprung π zu zwei verschiedenen Zeiten. Die Auslenkung an der Wand ist stets gleich 0. Dies entspricht einem festgehaltenen Ende.

In der folgenden Abbildung findet kein Phasensprung statt. Die Amplitude der Überlagerung (rot) setzt sich aus der Summe der blauen und grünen Amplitude zusammen. Sie schwankt zwischen einem Minimum und einem Maximum.

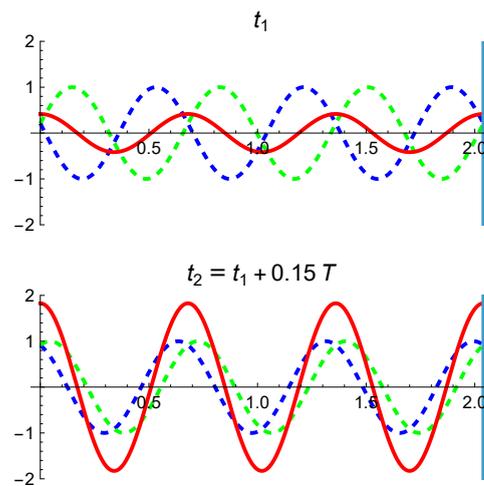


Abbildung Vollständige Reflexion mit Phasensprung 0 zu zwei verschiedenen Zeiten.
Die Auslenkung an der Wand ist maximal. Dies entspricht einem freien Ende.

Wir werden im Kapitel "Akustik" Beispiele für diese zwei Arten von Phasensprüngen kennen lernen.

Huygens'sches Prinzip und Überlagerungen

Huygens'sches Prinzip

Wie vorne schon ausgeführt ist das Huygens'sche Prinzip nur eine der Möglichkeiten, die Reflexion und Transmission von Wellen an einem Übergang zu bestimmen. Es ist jedoch sehr anschaulich und kann auch zur Analyse von Beugungserscheinungen (siehe "Optik") verwendet werden.

Huygens'sches Prinzip

Das **Prinzip von Huygens** besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen kugelförmigen (im 3D) bzw. kreisförmigen (im 2D) Welle, der so genannten **Elementarwelle**, betrachtet werden kann. Die Lage der Wellenfront wird dann mittels **Überlagerung** (Superposition) sämtlicher Elementarwellen gebildet.

In den folgenden Abbildungen sind jeweils Kurven gleicher Phase (im 2D z.B. Geraden für eine ebene Welle und Kreise für eine Kreiswelle) eingezeichnet. Der Abstand zwischen zwei Maxima (Peaks) entspricht einer Phasendifferenz von 2π bzw. einer Wellenlänge λ .

Eine Welle bewegt sich in der Periodendauer T um eine Wellenlänge λ . Die Abstände zwischen zwei Maxima einer Elementarwellen beträgt λ . Die Superposition der Elementarwellen führt dazu, dass sich die Amplitudenmaxima der Überlagerung da befinden, wo sich die Wellen gegenseitig maximal verstärken (bzw. am wenigsten auslöschen). Die Einhüllende dieser Elementarwellen ist die neue **Wellenfront**.

Ausbreitung einer Kreiswelle und einer ebenen Welle

Der Abstand zwischen den eingezeichneten Wellenfronten ist λ . Die sich ausbreitenden Elementarwellen haben sich nach der Zeit T um λ ausgebreitet. Man sieht deutlich, dass die Einhüllende bei der Kreiswelle ein Kreis und die Einhüllende bei der ebenen Welle eine Gerade (Ebene im 3D) ergibt.

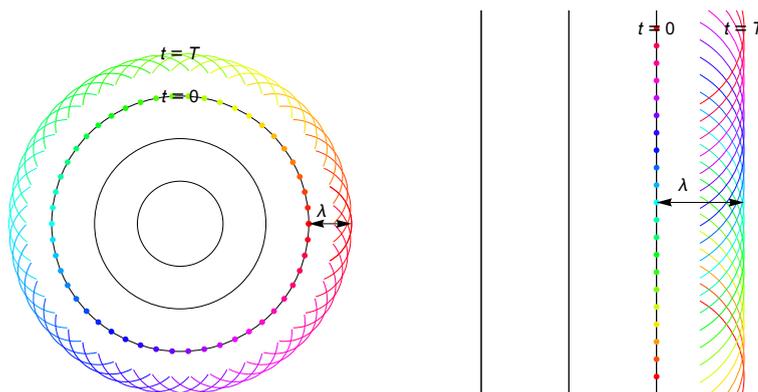


Abbildung Ausbreitung einer Kreiswelle (links) und einer ebenen Welle (rechts). Die Elementarwellen (Kreise mit Radius λ) ergeben durch Superposition die neue Wellenfront (Einhüllende) an jenen Positionen, wo maximale Verstärkung stattfindet. Dies ergibt im 2D wieder einen Kreis bzw. eine Gerade.

Reflexion und Brechung bei einem Übergang

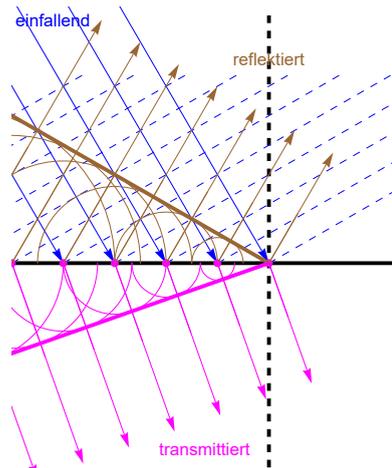


Abbildung Reflexion und Brechung einer ebenen Welle an einem Übergang
Die Pfeile stellen die Strahlen dar.
Die dicken Linien stellen die Wellenfront dar.

Der Abstand zwischen den eingezeichneten (blau strichlierten) Wellenfronten sei λ_1 und die strichlierten Linien entsprechen jeweils einer maximalen Auslenkung (peak). Dann treffen die blau eingezeichneten Wellenstrahlen im zeitlichen Abstand $\Delta t = \frac{\lambda_1}{c_1} = T$ auf die auf der Oberfläche eingezeichneten Punkte ein. Von jedem Punkt startet eine kreisförmige Elementarwelle.

Beim Punkt ganz rechts trifft die Wellenfront gerade ein. Der Kreis der Elementarwelle hat den Radius $r = 0$.

Beim Punkt links davon traf die Welle um die Zeit T früher ein, und die Welle hat sich bereits kreisförmig um die Strecke $r = c_1 T = \lambda_1$ in das Medium 1 zurück bewegt (Reflexion) und um $r = c_2 T = \lambda_2$ in das Medium 2 vorwärts bewegt (Brechung).

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium 2 ist kleiner als im Medium 1. Deshalb ist die Wellenlänge entsprechend kleiner (was in der Zeichnung durch die kleineren Kreise zum Ausdruck kommt).

Analog erhalten wir für die weiteren Punkte links davon ...

Reflexion	$r = c_1 2 T = 2 \lambda_1$	Brechung	$r = c_2 2 T = 2 \lambda_2$
Reflexion	$r = c_1 3 T = 3 \lambda_1$	Brechung	$r = c_2 3 T = 3 \lambda_2$
Reflexion	$r = c_1 4 T = 4 \lambda_1$	Brechung	$r = c_2 4 T = 4 \lambda_2$

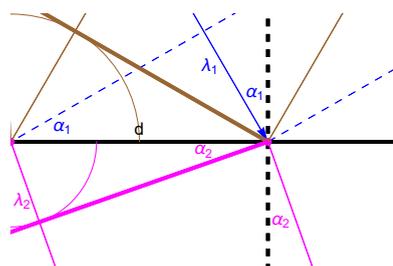
Für den reflektierten Strahl ergibt sich aus der Einhüllenden das **Reflexionsgesetz** ...

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel

und für den gebrochenen Strahl ergibt sich (mithilfe der Trigonometrie) das **Brechungsgesetz** ...

$$\frac{\sin[\alpha_1]}{c_1} = \frac{\sin[\alpha_2]}{c_2}$$

denn durch Hineinzoomen in die Nähe des Koordinatenursprungs erhalten wir ...



Die Hypothenusen der beiden rechtwinkligen Dreiecke (blau mit Gegenkathete λ_1 , magenta mit Gegenkathete λ_2 ,) haben die gleiche Länge d . Das heisst ...

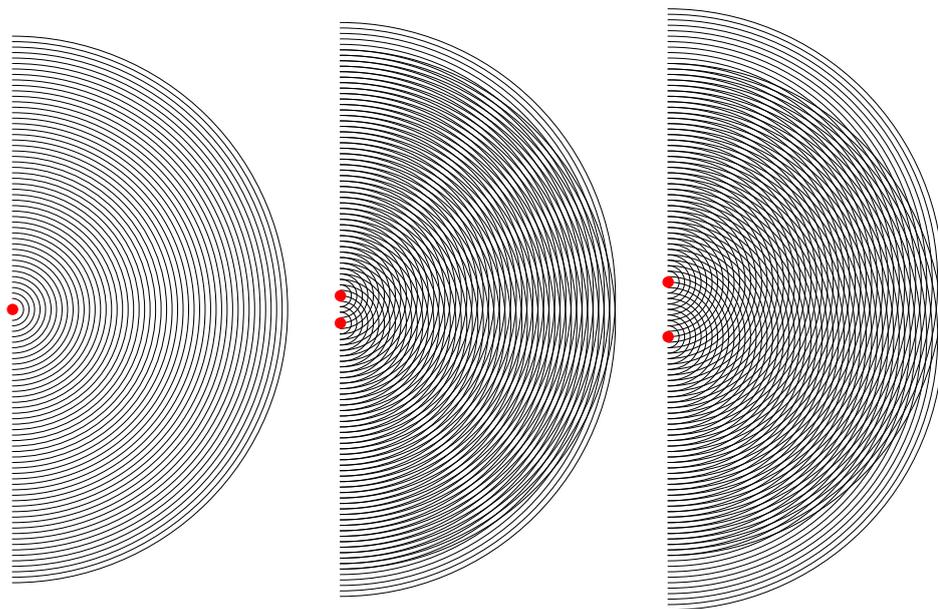
$$d = \frac{\lambda_1}{\sin[\alpha_1]} = \frac{\lambda_2}{\sin[\alpha_2]}$$

und mit Hilfe von $T_1 = T_2$ (die Periodendauern der einfallenden Welle führt zu Schwingungen am Übergang und diese Schwingungen sind der Ausgangspunkt der reflektierten und transmittierten Elementarwellen, die natürlich die gleiche Periodendauer haben) und der Tatsache, dass $\lambda = \frac{c}{T}$ folgt ...

$$\frac{\frac{c_1}{T_1}}{\sin[\alpha_1]} = \frac{\frac{c_2}{T_2}}{\sin[\alpha_2]} \quad \rightarrow \quad \frac{c_1}{\sin[\alpha_1]} = \frac{c_2}{\sin[\alpha_2]}$$

Beugung

Die folgende Abbildung illustriert die Überlagerung von Kreiswellen.



- Abbildung**
- Links: Eine ausbreitende Kreiswelle. Die Kreise bedeuten die maximalen Auslenkungen. Sie befinden sich im Abstand λ voneinander.
 - Mitte: Überlagerung zweier Kreiswellen ($d = 1 \text{ LE}$, $\lambda = 0.2 \text{ LE}$)
 - Rechts: Überlagerung zweier Kreiswellen ($d = 2 \text{ LE}$, $\lambda = 0.2 \text{ LE}$)

Wir sehen, dass bei grösserem Abstand die Richtungen der Minima/Maxima immer näher zusammenkommen.

Mit Hilfe der Huygens-Konstruktion können wir auch das Verhalten einer Welle an einem Spalt illustrieren. Die ebene einfallende Welle geht nicht geradelinig durch den Spalt, sondern wird abgelenkt. Es gibt bestimmte Richtungen, in denen die Intensität maximal ist und andere Richtungen, in denen die Intensität minimal ist.

Wir werden die Beugung ausführlicher in der "Optik" behandeln.

Überlagerung/Superposition/Interferenz

Wie bei den Schwingungen können wir auch bei den Wellen Interferenzen haben. Beispielsweise ...

- Stehende Wellen
- Schallwellen im Konzertsaal
- Wellen im Wasser
- Überlagerung an dünnen Schichten (siehe Optik)
- Interferometer mit Licht/elektromagnetischer Strahlung (siehe Optik)

Die folgende Demo veranschaulicht die Überlagerung $y_1 + y_2$ von zwei Sinusfunktionen mit unterschiedlichen Amplituden und Phasen ...

$$\hat{y}_1 \sin[kx + \varphi_1] + \hat{y}_2 \sin[kx + \varphi_2] = \hat{y}_1 \left(\sin[kx + \varphi_1] + \frac{\hat{y}_2}{\hat{y}_1} \sin[kx + \varphi_1 + \Delta\varphi] \right)$$

Wir können das Verhältnis $\frac{\hat{y}_2}{\hat{y}_1}$ und die Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ unten variieren. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\hat{y}_1 = 1$ und $\varphi_1 = 0$.

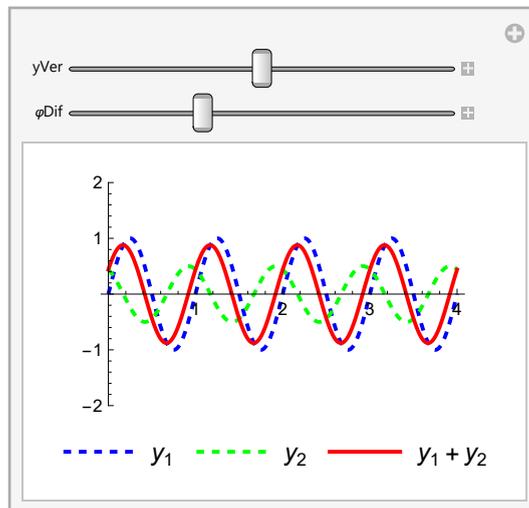


Abbildung Demo: Veranschaulichung der Überlagerungen

Trotz unterschiedlicher Amplituden und Phasen ergibt sich wieder eine Sinusfunktion. Für die Verstärkung der beiden Signale ist die Phasenbeziehung entscheidend.

Maximale Verstärkung

Wenn der Phasenunterschied ein ...

Vielfaches von 2π ist

$$\Delta\varphi = i * 2\pi = (2i) * \pi$$

$$i = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

dann haben wir **maximale Verstärkung**. Bei gleichen Amplituden ergibt dies ...

$$\sin[kx + \varphi_1] + \sin[kx + \varphi_1 + i * 2\pi] = 2$$

Maximale Auslöschung

Wenn der Phasenunterschied ein ...

$$\begin{aligned} \text{halbzahliges Vielfaches von } 2\pi \text{ ist} \quad \Delta\varphi &= \left(i + \frac{1}{2}\right) * 2\pi = (2i + 1) * \pi \\ i &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

dann haben wir **maximale Auslöschung**. Bei gleichen Amplituden ergibt dies ...

$$\text{Sin}[kx + \varphi_1] + \text{Sin}\left[kx + \varphi_1 + \left(i + \frac{1}{2}\right) * 2\pi\right] = 0$$

Sonst

Bei unterschiedlichen Amplituden erhalten wir - wie wir aus der Demo entnehmen können - auch eine Sinusfunktion. Es gilt (ohne Herleitung) ...

$$\hat{y}_1 \text{Sin}[kx + \varphi_1] + \hat{y}_2 \text{Sin}[kx + \varphi_2] = \hat{y} \text{Sin}[kx + \varphi]$$

$$\text{mit} \quad \hat{y} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \text{Cos}[\varphi_2 - \varphi_1]}$$

$$\text{Tan}[\varphi] = \frac{\hat{y}_1 \text{Sin}[\varphi_1] + \hat{y}_2 \text{Sin}[\varphi_2]}{\hat{y}_1 \text{Cos}[\varphi_1] + \hat{y}_2 \text{Cos}[\varphi_2]}$$

Stehende Wellen

Wir untersuchen hier die Situation, wenn zwei Wellen mit gleicher Wellenzahl, Kreisfrequenz und Amplitude aufeinander zulaufen und sich überlagern ...

$$y[x, t] = y^+[x, t] + y^-[x, t] = \hat{y} \text{Sin}[kx - \omega t + \varphi^+] + \hat{y} \text{Sin}[kx + \omega t + \varphi^-]$$

Zur Addition von zwei Sinusfunktionen mit gleicher Amplitude und unterschiedlichen Phasen können wir den **zweiten Summensatz** verwenden. Er lautet ...

$$\text{Sin}[\alpha] + \text{Sin}[\beta] = 2 \text{Sin}\left[\frac{\alpha + \beta}{2}\right] \text{Cos}\left[\frac{\alpha - \beta}{2}\right]$$

Somit können wir rechnen ...

$$\begin{aligned} y^+[x, t] + y^-[x, t] &= \hat{y} \text{Sin}[kx - \omega t + \varphi^+] + \hat{y} \text{Sin}[kx + \omega t + \varphi^-] \\ &= \hat{y} \left(\text{Sin}[kx - \omega t + \varphi^+] + \text{Sin}[kx + \omega t + \varphi^-] \right) \\ &= 2 \hat{y} \text{Sin}\left[\frac{(kx - \omega t + \varphi^+) + (kx + \omega t + \varphi^-)}{2}\right] \text{Cos}\left[\frac{(kx - \omega t + \varphi^+) - (kx + \omega t + \varphi^-)}{2}\right] \\ &= 2 \hat{y} \text{Sin}\left[kx + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}\right] \text{Cos}\left[-\omega t + \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2}\right] \quad | \end{aligned}$$

und mit $\text{Cos}[-x] = \text{Cos}[x]$ folgt schlussendlich ...

$$= 2 \hat{y} \text{Sin}\left[kx + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}\right] \text{Cos}\left[\omega t - \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2}\right]$$

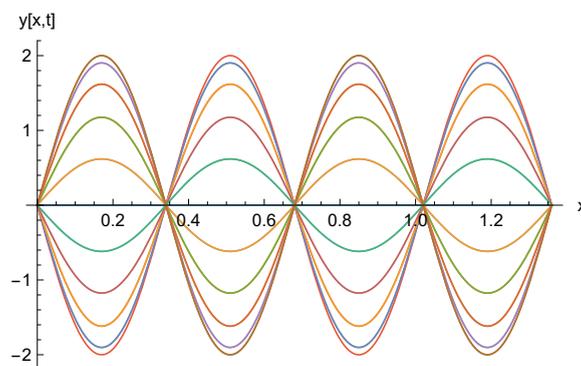


Abbildung Die Auslenkungen zu verschiedenen Zeiten für den Spezialfall $\frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2} = 0$. Dann ist ein Knoten bei $x = 0$. Die Knoten und Bäuche sind gut zu erkennen.

Die Orts- und Zeitabhängigkeit sind nun separiert. Wir haben keine fortschreitende Welle mehr, sondern eine sogenannte **stehende Welle**. Die maximalen Auslenkungen (Bäuche) und Nulldurchgänge (Knoten) der Auslenkung sind immer am gleichen Ort. An jedem Ort führen die Teilchen eine harmonische Schwingung zwischen den Umhüllenden $\pm 2 \hat{y} \sin\left[kx + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}\right]$ aus.

Wellenknoten

An bestimmten Stellen x gibt es es sogenannte **Wellenknoten**. Das heisst, dass dort die Teilchen in Ruhe sind (Auslenkung ist gleich 0). Dies ist an jenen Stellen x der Fall, wo die obige Sinusfunktion gleich 0 ist

...

$$\sin\left[kx + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}\right] = 0 \quad \text{Auslenkung gleich 0}$$

Wellenbäuche

An Stellen zwischen diesen Wellenknoten, gibt es maximale Schwingungsamplituden. Diese Stellen nennt man **Wellenbäuche**. Sie treten an jenen Stellen x auf, wo die obige Sinusfunktion gleich ± 1 ist ...

$$\sin\left[kx + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}\right] = \pm 1 \quad \text{Maximale Auslenkungen (im Raum)}$$

Die Teilchen schwingen beim Wellenbauch zwischen $2 \hat{y}$ und $-2 \hat{y}$.

Bemerkung

Wenn die Amplituden der beiden Wellen $y^+[x, t]$ und $y^-[x, t]$ nicht gleich gross sind, erhalten wir keine stehende Welle.

Anhang

Anhang A Experimente

Slinky



Abbildung Slinky (siehe [Link](#)).

Mit diesem Slinky können sowohl Transversalwellen als auch Longitudinalwellen anschaulich dargestellt werden.

Überlagerung von Wasserwellen



Abbildung Überlagerung von Wasserwellen (siehe [Link](#))

Akustik

Viele Experimente zu mechanischen Wellen können auch im Skript "Akustik" gefunden werden. Denn Schallwellen sind mechanische Longitudinalwellen in Luft.

Anhang B Quellen

Um sich schnellstmöglich ein Bild zu machen, wo die für das Kapitel “Mechanische Wellen” relevanten Themen im **Kuchling** und in den beiden **Merkhilfen** gefunden werden können, ist in diesem Anhang eine detaillierte Auflistung gegeben.

Viele weitere Quellen (insbesondere frei zugängliche Wikipedia Artikel) wurden direkt im Text integriert.

H. Kuchling, “Taschenbuch der Physik”, 2022 (22. Auflage), 714 Seiten

Der für das Kapitel “Mechanische Wellen” relevante Teil ist Kapitel 14.

14. Mechanische Wellen	Seiten 232 - 243
14.1 Wellenausbreitung	
14.1.1 Huygens’sches Prinzip	
14.1.2 Wellenarten	
14.2 Lineare Sinuswelle	
14.2.1 Wellengleichung	
14.2.2 Elongation	
14.2.3 Phasengeschwindigkeit	
14.2.4 Phasensprung	
14.2.5 Stehende Wellen	
14.3 Wellen in ausgedehnten Medien	
14.3.1 Überlagerung	
14.3.2 Reflexion	
14.3.3 Brechung	
14.3.4 Beugung	
14.4 Grössen des Wellenfeldes	
14.4.1 Energiedichte	
14.4.2 Energiestrom	
14.4.3 Leistung	
14.4.4 Intensität	
14.4.5 Wellenwiderstand	

N. Marxer, “Physik Merkhilfe”, 2019, 55 Seiten

Auf den folgenden Seiten können die relevanten Inhalte zum Kapitel “Mechanische Wellen” gefunden werden ...

Seite 20-21	Mechanische Wellen
Seite 22-23	Superposition (Interferenz)
Seite 54	Winkelfunktionen

Anhang C Kurze historische Entwicklung

Das Studium von Wellen in der Physik hat sich über die Jahrhunderte entwickelt. Die ersten Beobachtungen betrafen **Schall-** und **Wasserwellen**. Später folgten die **Lichtwellen** und noch später die **Materiewellen** auf Grund der Welle-Teilchen-Dualität.

Im Folgenden sind zentrale Meilensteine der historischen Entwicklung von Wellen aufgeführt.

Frühe Beobachtungen und Schall:

- Alte Griechen: Beobachtungen von Wellen in der Natur (wie Wasserwellen) wurden schon vor langer Zeit gemacht. Die alten Griechen stellten fest, dass vibrierende Saiten einen Sound produzierten. Damit war ein Grundverständnis für Wellen gelegt. **Pythagoras** (570 - 494 BCE) und andere untersuchten den mathematischen Zusammenhang von vibrierenden Saiten.
17. Jahrhundert: Galileo **Galilei** (1564-1642) machte bedeutende Fortschritte bei der Untersuchung von vibrierenden Saiten / Körpern, insbesondere die Abhängigkeit der Frequenz von der Saitenspannung.
- Marin **Mersenne** (1588-1648) machte erste Untersuchungen zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft.
- Robert **Boyle** (1627-1691) zeigte experimentell, dass Schallwellen zur Ausbreitung ein Medium brauchen. Das heisst, sie breiten sich nicht im Vakuum aus.
- Christiaan **Huygens** (1629-1695) entwickelte die Wellentheorie des Lichts und stellte die Hypothese auf, dass Licht als Welle propagiert, und postulierte den lichttragenden Aether.
- Isaac **Newton** (1642-1726) leitete Beziehungen für Wellengeschwindigkeiten in Festkörpern ab.
18. Jahrhundert: Jean Le Rond **d'Alembert** (1717-1783) leitete die Wellengleichung her.

Licht und Electromagnetismus

19. Jahrhundert Die Natur des Lichts wurde weiter untersucht. William **Herschel** (1738-1822) entdeckte die Infrarot Strahlung, und Johann Wilhelm **Ritter** (1776-1810) entdeckte die UV-Strahlung.
- Thomas **Young** (1773-1829) führte Interferenz-Experimente durch, die im Einklang mit der Wellentheorie des Lichts waren.
- Augustin-Jean **Fresnel** (1788-1827) machte weitere Fortschritte im Verständnis der Beugung und Polarisation von Licht.
- 1862-1864: James Clerk **Maxwell** (1831-1879) vereinigte die Elektrizität und den Magnetismus in den sogenannten Maxwell Gleichungen. Aus ihnen lässt sich die Existenz von elektromagnetischen Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, voraussagen.
- 1887-1888: Heinrich **Hertz** (1857-1894) bestätigte experimentell Maxwell's Theorie, indem er Radio-Wellen erzeugte und zeigte, dass sie Wellen Eigenschaften hatten.

Materie Wellen

- 1905: Albert **Einstein** (1879-1955) entwickelte das Welle-Teilchen Konzept weiter, indem er zur Erklärung des Photoeffekts das Photon als Lichtteilchen postulierte.
- 1926: Erwin **Schrödinger** (1887-1961) entwickelte die Schrödinger Gleichung, die das wellenähnliche Verhalten von Teilchen beschreibt.
- 1927 Louis de **Broglie** (1892-1987) schlug vor, dass Materie (z.B. Elektronen) auch Welleneigenschaften hat.
- 1927: Clinton **Davisson** (1881-1958) und Lester **Germer** (1896-1971) sowie unabhängig davon George Paget **Thomson** (1892-1975) beobachteten Elektronenbeugung, was die Welle-Teilchen-Dualität zeigte.
- 1930-er Jahre: Otto **Stern** (1888-1969) führte ähnliche Experimente mit Helium und Wasserstoffmolekülen durch und zeigte so, dass das Wellenverhalten eine allgemeine Eigenschaft von Materie ist.

Moderne Entwicklungen

- Quanten Mechanik: Das Konzept einer Wellenfunktion, einer mathematischen Beschreibung eines Quantensystems, wurde zentral für die Quantenmechanik.
- Neutronenbeugung: Neutronen wurden in der Kristallographie und anderen Anwendungen gebraucht. Dabei wurden deren Welleneigenschaften zum Studium von Materiestrukturen ausgenutzt.
- Welle-Teilchen Dualität: Die moderne Physik untersucht weiterhin die Welle-Teilchen-Dualität von Materie und Energie, ein Konzept das unser Verständnis des Universums auf einer fundamentalen Ebene revolutionierte.

Anhang D Wellengleichung

Im Skript vorne stand ...

Jede Funktion der Form $f[x - c t]$ oder $f[x + c t]$ beschreibt eine mit der Geschwindigkeit c von links nach rechts (in Richtung der x -Achse) bzw. von rechts nach links propagierende Welle und erfüllt die Wellengleichung (siehe Anhang D) ...

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Wellengleichung}$$

oder kürzer ...

$$y'' - \frac{1}{c^2} \ddot{y} = 0$$

wobei die Striche die Ableitung nach dem Ort x und die Punkte die Ableitung nach der Zeit t bedeuten.

Wir werden dies nun etwas genauer erläutern.

$f[x - c t]$ und $f[x + c t]$ beschreiben fortlaufende Wellen

Wir wissen, dass $f[x - a]$ die Funktion darstellt, dessen Funktionsgraph um den Wert a in x -Richtung verschoben ist.

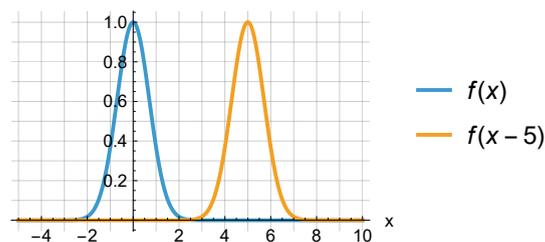


Abbildung $f[x] = e^{-x^2}$ und $f[x - 5] = e^{-(x-5)^2}$

Somit stellt $f[x - c t]$ den um $c t$ nach rechts verschobenen Funktionsgraphen dar. Wenn die Zeit vergeht (t grösser wird), wird der Funktionsgraph um $c t$ nach rechts verschoben.

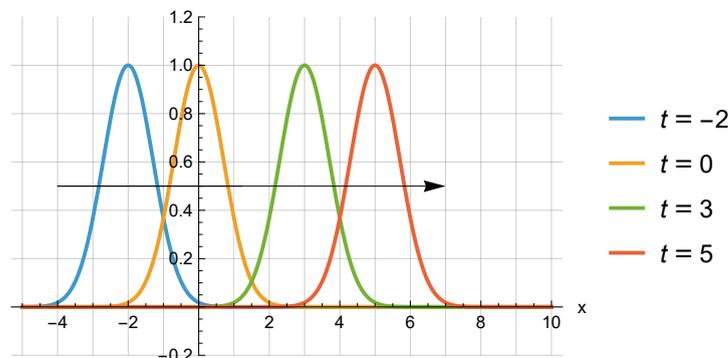


Abbildung $f[x] = e^{-(x-ct)^2}$ für $c = 1$ und verschiedene Zeiten

$f[x - ct]$ und $f[x + ct]$ erfüllen die Wellengleichung

Die Wellengleichung lautet ...

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Die Ableitungen nach x ergeben ...

$$\frac{\partial f[x-ct]}{\partial x} = f'[x-ct] * 1 = f'[x-ct]$$

f' ist die Ableitungsfunktion von f
 1 ist die innere Ableitung (d.h. $\frac{\partial(x-ct)}{\partial x}$)

$$\frac{\partial^2 f[x-ct]}{\partial x^2} = f''[x-ct] * 1 = f''[x-ct]$$

f'' ist die zweite Ableitung von f
 1 ist die innere Ableitung (d.h. $\frac{\partial(x-ct)}{\partial x}$)

Die Ableitungen nach t ergeben ...

$$\frac{\partial f[x-ct]}{\partial t} = f'[x-ct] * (-c)$$

f' ist die Ableitungsfunktion von f
 $(-c)$ ist die innere Ableitung (d.h. $\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}$)

$$\frac{\partial(-c f'[x-ct])}{\partial t} = -c f''[x-ct] * (-c) = c^2 f''[x-ct]$$

$-c$ (eine Konstante) bleibt beim Ableiten erhalten
 f'' ist die zweite Ableitung von f
 $(-c)$ ist die innere Ableitung (d.h. $\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}$)

Einsetzen in die Wellengleichung zeigt, dass sie erfüllt ist ...

$$f''[x-ct] - \frac{1}{c^2} c^2 f''[x-ct] = f''[x-ct] - f''[x-ct] = 0$$

Der Beweis für $f[x + ct]$ verläuft analog.